Théorème d'Abel angulaire + Théorème taubérien faible

Leçons : 207, 230, 241

Réf. : Gourdon, Analyse p 263.264 (3^e édition)

Th. (d'Abel angulaire)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1.

On note f sa somme, et pour $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on pose

$$\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0,\ \exists \varphi \in [-\theta_0, \theta_0] \text{ tq } z = 1 - \rho e^{i\varphi} \}$$

Si $\sum_n a_n$ converge, alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$

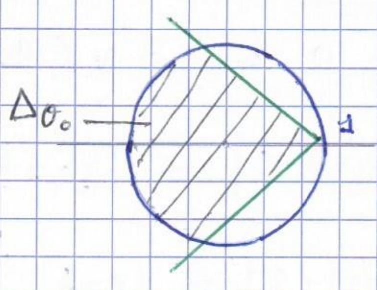
Th. (taubérien faible)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de cv 1, et de somme f.

On suppose que : $\exists S \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = S$.

Alors : si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = S$

Th. d'Abel



Soit $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$

Objectif : m.q. pour z dans Δ_{θ_0} "suffisamment proche de 1", $|f(z) - S|$ est "petit"

1) Ecrire $f(z) - S$ sous une forme sur laquelle on puisse travailler

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$

et $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$

S_n converge vers S donc $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ et $N \geq 1$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n (z^n - 1)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} R_n \left((z^{n+1} - 1) - (z^n - 1) \right) + R_0 (z^1 - 1) - R_N (z^{N+1} - 1)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} R_n (z^{n+1} - z^n) + R_0 (z - 1) - R_N (z^{N+1} - 1)$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = (z-1) \sum_{n=0}^{N} R_n z^n - \underbrace{R_N}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0} (\underbrace{z^{N+1}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0} - 1)$$

donc $\boxed{f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n}$ $\quad N \longrightarrow +\infty$

Soit $\varepsilon > 0$.

2) Méthode : on va majorer $|\Sigma|$ par $\Sigma | |$, utiliser le fait que R_n est petit quand $n \to +\infty$, et ensuite rapprocher z de 1 en restant dans Δ_{θ_0}.

a°/ R_n

$R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\exists N \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N \Rightarrow |R_n| \leq \varepsilon$.

On a alors :
$$|f(z) - S| \leq |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| \underbrace{|z|^n}_{\leq 1} + |z-1| \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon |z|^n}_{= \varepsilon \times |z|^{N+1} \times \frac{1}{1-|z|}}$$

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \times \frac{|z-1|}{1-|z|}$$

b°/ z

Soit maintenant $z \in \Delta_{\theta_0}$.

$|z| < 1$ et $\exists\, \rho > 0$, $\varphi \in [-\theta_0, \theta_0]$ tq $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$

On a donc $|z|^2 = 1 - 2\rho \cos\varphi + \rho^2$ et $|z-1| = \rho$

et par ailleurs $\quad 0 \leq \cos\theta_0 \leq \cos\varphi$

$$|f(z) - S| \leq \rho \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \times \frac{\rho \times (1+|z|)}{1-|z|^2} \quad \text{quantité conjuguée}$$

$$\leq \rho \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \times \frac{2\rho}{2\rho\cos\varphi - \rho^2} \quad |z|<1$$

$$|f(z) - S| \leq \rho \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \times \frac{2}{2\cos\theta_0 - \rho}$$

Soit $\alpha > 0$ tq $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| \leq \varepsilon$.

Alors pour $\rho \leq \min(\alpha, \cos\theta_0)$,

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon \times \frac{2}{\cos\theta_0}$$

soit $\boxed{|f(z) - S| \leq \varepsilon\left(1 + \frac{2}{\cos\theta_0}\right)}$

Th. taubérien faible

Posons pour $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Par hypothèse, $a_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$ donc $k a_k \to 0$ donc $(k a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Il existe donc $M > 0$ tq $\forall k \in \mathbb{N}$, $k|a_k| \leq M$.

Rq : on veut m.q. : $\exists N$ tq $n \geq N \Rightarrow |S_n - S| \leq \varepsilon$ (où $\varepsilon > 0$)

$x \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$

$k \geq 1$: $(1-x^k) = (1-x)(1+x+\dots+x^{k-1}) \leq k(1-x)$ $\quad$ si $k \geq n+1$, $\frac{k}{n} \geq 1$

donc $$|S_n - f(x)| \leq (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k$$

$$|S_n - f(x)| \leq (1-x)Mn + \frac{\sup_{k>n} k|a_k|}{n(1-x)} \times \underbrace{x^{n+1}}_{\leq 1}$$

Soit $1 > \varepsilon > 0$. En posant $x = 1 - \frac{\varepsilon}{n}$, on a

$$\left|S_n - f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq \varepsilon M + \frac{\sup_{k\geq n} k|a_k|}{\varepsilon}$$

Or, $k\,a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\exists N_0 \in \mathbb{N}^* \,/\, k \geq N_0 \Rightarrow k|a_k| \leq \varepsilon^2$

Pour $n \geq N_0$, on a donc

$$\left|S_n - f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq \varepsilon M + \varepsilon$$

soit $$\left|S_n - f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq (M+1)\,\varepsilon.$$

Enfin, $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} S$

donc $\exists N_1 \geq N_0$ tq : $\forall n \geq N_1$, $\left|S - f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$.

Pour $n \geq N_1$, on a alors

$$|S_n - S| \leq \left|S_n - f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)\right| + \left|f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right) - S\right|$$

$$|S_n - S| \leq (M+2)\,\varepsilon.$$